

УДК 532.517

К задаче о движении двух массовых вихрей в идеальной жидкости

С. М. Рамоданов

Институт криптографии, связи и информатики
119602, Москва, Мичуринский проспект, д. 70
E-mail: ramodanov@mail.ru

Получено 23 октября 2006 г.

В работах [4, 5] изучена задача о плоскопараллельном движении двух круговых цилиндров в идеальной жидкости. Впервые эту задачу рассмотрел Хикс [1, 2] в 1879 г. Родственные задачи о движении в жидкости двух сфер рассматривались Стоксом, Хиксом, Карлом и Вильгельмом Бьеркнесом, Кирхгофом и Н. Е. Жуковским (ссылки имеются в [3] и [7]). Предполагая циркуляции вокруг цилиндров постоянными и отличными от нуля и устремляя радиусы цилиндров к нулю, в [5] были получены новые гидромеханические объекты — *массовые вихри*. Для этой предельной постановки задачи были выведены уравнения движения, распространенные затем на случай произвольного числа массовых вихрей. Эти уравнения обобщают классические уравнения Кирхгофа, описывающие движение точечных вихрей на плоскости. В настоящей работе исследуется задача о движении двух массовых вихрей (частично эта задача исследована в [5]). Выполнено понижение порядка и, используя сечение Пуанкаре, показана ее хаотичность и неинтегрируемость. Указаны интегрируемые случаи. В заключении вкратце исследуется движение массового вихря и цилиндра в полуплоскости, заполненной жидкостью.

Ключевые слова: движение круговых цилиндров, массовые вихри, понижение порядка, вихри в области.

S. M. Ramodanov

On the motion of two mass vortices in perfect fluid

The system of two interacting dynamically 2D rigid circular cylinders in an infinite volume of perfect fluid was considered in [4, 5], while the pioneering contribution is due to Hicks [1, 2]. An allied problem, the motion of two spheres in perfect fluid, was studied by Stokes, Hicks, Carl and Vilhelm Bjerknes, Kirhhoff, and Joukowski (the references can be found in [3] and [7]). Assuming the circulations around the cylinders to be constant and making the radii of the cylinders infinitely small result in new 2D hydrodynamic objects called *mass vortices* [5]. The equations of motion for mass vortices expand upon the classical Kirhhoff equations governing the motion of ordinary point vortices. In this paper the motion of two mass vortices is examined in greater detail (some results have been obtained already in [5]). A reduction of order is performed; using the Poincaré surface-of-section technique the system is shown to be generally non-integrable. Some integrable cases are indicated. In conclusion the motion of a single mass vortex and the motion of cylinder in a half plane are briefly investigated.

Keywords: motion of circular cylinders, mass vortices, reduction of order, vortices in a domain.
Mathematical Subject Classifications: 76M23

1. Уравнения движения

Приведем некоторые результаты, полученные в [4, 5]. Движение двух цилиндров в идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности, описывается уравнениями Пуанкаре на группе $E(2) \otimes \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial u_1} - \omega \frac{\partial R}{\partial u_2} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial u_2} + \omega \frac{\partial R}{\partial u_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \omega} + u_1 \frac{\partial R}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial R}{\partial u_1} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial R}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u_1, u_2 — компоненты абсолютной скорости центра первого цилиндра O_1 в системе координат $O_1\xi_1\xi_2$, связанной с цилиндрами; s — расстояние между центрами цилиндров; ω — угловая скорость вращения системы координат $O_1\xi_1\xi_2$ (рис. 1). Функция Рауса R имеет вид [7, § 139–141]:

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{2} (a_1(s)u_1^2 + a_2(s)u_2^2 + a_3(s)\omega^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + \\ + b_1(s)u_2\omega + b_2(s)u_1\dot{s} - \Gamma^2\kappa(s) - \Gamma\beta(s)u_2 - \Gamma\gamma(s)\omega. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Коэффициенты a_i, b_i включают в себя присоединенные массы и присоединенные моменты двух цилиндров; величины $\beta(s), \gamma(s)$ представляют собой мгновенный расход жидкости через разрез, соединяющий центры цилиндров, и, наконец, $\Gamma^2\kappa(s)$ — кинетическая энергия циркуляционного обтекания. Пока предполагается, что циркуляция вокруг первого цилиндра равна Γ , а вокруг второго — $(-\Gamma)$.

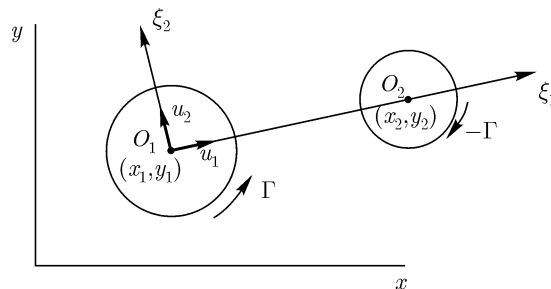


Рис. 1

Устремим теперь радиусы цилиндров R_1 и R_2 к нулю, предполагая, что их массы m_1 и m_2 , а также циркуляции остаются постоянными. Тогда коэффициенты функции (1.2) упрощаются:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = m_1 + m_2 = a, \quad a_3 = m_2 s^2, \quad a_4 = m_2, \\ b_1 = m_2 s, \quad b_2 = m_2, \quad \beta = s, \quad \gamma = \frac{s^2}{2}, \quad \kappa = \frac{\ln s}{2\pi}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись далее тривиальными кинетическими соотношениями, получаем уравнения движения двух массовых вихрей с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и интенсивностями Γ и $-\Gamma$:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\Gamma \dot{y}_1 + f(s)(x_2 - x_1), & m_2 \ddot{x}_2 &= +\Gamma \dot{y}_2 - f(s)(x_2 - x_1), \\ m_1 \ddot{y}_1 &= +\Gamma \dot{x}_1 + f(s)(y_2 - y_1), & m_2 \ddot{y}_2 &= -\Gamma \dot{x}_2 - f(s)(y_2 - y_1), \\ f(s) &= \frac{\Gamma^2}{2\pi s^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) можно обобщить на случай n массовых вихрей с уже произвольными циркуляциями Γ_j [5]. При $n = 2$ эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= -\Gamma_1 J \dot{r}_1 + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi} \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^2}, \\ m_2 \ddot{r}_2 &= +\Gamma_2 J \dot{r}_2 - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi} \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^2}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ r_1 &= (x_1, y_1), \quad r_2 = (x_2, y_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Несложно проверить [5], что эти уравнения (обобщающие уравнения (1.3)) можно представить в лагранжевой форме с функцией Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} \dot{r}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{r}_2^2 - \frac{\Gamma_1}{2} (J \dot{r}_1, r_1) - \frac{\Gamma_2}{2} (J \dot{r}_2, r_2) - U, \\ U &= -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \ln |r_1 - r_2|^2. \end{aligned}$$

Система (1.4) имеет первые интегралы

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Phi_1, \Phi_2) = m_1 \dot{r}_1 + \Gamma_1 J r_1 + m_2 \dot{r}_2 + \Gamma_2 J r_2, \\ M &= m_1 (\dot{r}_1, J r_1) + m_2 (\dot{r}_2, J r_2) - \frac{\Gamma_1}{2} r_1^2 - \frac{\Gamma_2}{2} r_2^2, \\ \frac{1}{2} (m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2) + U &= H. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Гамильтонова форма уравнений движения. Сведение к двум степеням свободы

Выполнив преобразование Лежандра

$$(p_1, p_2) = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_1} = m_1 \dot{r}_1 + \frac{\Gamma_1}{2} J r_1, \quad (p_3, p_4) = m_2 \dot{r}_2 + \frac{\Gamma_2}{2} J r_2$$

и обозначив $r_1 = (q_1, q_2)$, $r_2 = (q_3, q_4)$, запишем уравнения (1.4) в виде классических уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i \in \overline{1, 4}, \\ H &= \frac{1}{2m_1} \left(\left(p_1 - \frac{\Gamma_1}{2} q_1 \right)^2 + \left(p_2 + \frac{\Gamma_1}{2} q_2 \right)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2m_2} \left(\left(p_3 - \frac{\Gamma_2}{2} q_3 \right)^2 + \left(p_4 + \frac{\Gamma_2}{2} q_4 \right)^2 \right) + U. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Первые интегралы (1.5) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= p_1 + p_3 + \frac{\Gamma_1}{2} q_2 + \frac{\Gamma_2}{2} q_4, \quad \Phi_2 = p_2 + p_4 - \frac{\Gamma_1}{2} q_1 - \frac{\Gamma_2}{2} q_3, \\ M &= p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_4 - p_4 q_3. \end{aligned}$$

Скобки Пуассона первых интегралов имеют вид

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \{\Phi_1, M\} = \Phi_2, \quad \{\Phi_2, M\} = -\Phi_1.$$

Система (2.1) имеет четыре степени свободы. В случае $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ на нулевом уровне первых интегралов $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ имеется три интеграла в инволюции. Следовательно, при этих условиях система (2.1) интегрируема. Явное сведение к системе с одной степенью свободы и качественное исследование приведено в [5].

В общем случае имеется только два интеграла в инволюции, например, M и $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$, что позволяет понизить число степеней свободы на две единицы. Чтобы выполнить понижение порядка в явном виде, выберем в качестве новых переменных первые интегралы векторных полей $\{M, \cdot\}$ и $\{\Phi_1^2 + \Phi_2^2, \cdot\}$:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2, \\ \xi_2 &= \left(p_1 - \frac{\Gamma_1}{2}q_1\right)^2 + \left(p_2 + \frac{\Gamma_1}{2}q_2\right)^2, \\ \xi_3 &= \left(p_3 - \frac{\Gamma_2}{2}q_4\right)^2 + \left(p_4 + \frac{\Gamma_2}{2}q_3\right)^2, \\ \xi_4 &= 4p_1(q_1 - q_3) + 4p_2(q_2 - q_4) - 2\Gamma_1(q_4q_1 - q_3q_2), \\ \xi_5 &= 4p_3(q_3 - q_1) + 4p_4(q_4 - q_2) + 2\Gamma_2(q_4q_1 - q_3q_2).\end{aligned}$$

Необходимые для записи уравнений движения скобки Пуассона имеют вид:

$$\begin{aligned}\{\xi_1, \xi_2\} &= \xi_4, \quad \{\xi_1, \xi_3\} = \xi_5, \quad \{\xi_1, \xi_4\} = \{\xi_1, \xi_5\} = 8\xi_1, \\ \{\xi_2, \xi_3\} &= 0, \quad \{\xi_2, \xi_4\} = 4(-\Gamma_1\xi_6 - 2\xi_2), \\ \{\xi_2, \xi_5\} &= \frac{1}{2\xi_1}(\xi_4(\xi_4 - \xi_5) - 16\xi_1\xi_2 + 4\xi_6(\xi_6 - \xi_7)), \\ \{\xi_3, \xi_4\} &= \{\xi_2, \xi_5\}, \quad \{\xi_3, \xi_5\} = 4(-\Gamma_2\xi_7 - 2\xi_3).\end{aligned}$$

Здесь $4\xi_6^2 = 16\xi_1\xi_2 - \xi_4^2$ и $4\xi_7^2 = 16\xi_1\xi_3 - \xi_5^2$. Полученная пуассонова структура вырождена, ее ранг равен четырем. Поэтому соответствующая система имеет две степени свободы. Для ее явного получения необходимо исключить одну из переменных ξ_1, \dots, ξ_5 , используя соотношение (функцию Казимира)

$$4\xi_6\xi_7 + \xi_4\xi_5 + 2\xi_1[4(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - 8M(\Gamma_1 + \Gamma_2) - 4(\xi_2 + \xi_3) + 4\Gamma_1\Gamma_2\xi_1 + 4(\Gamma_1\xi_7 + \Gamma_2\xi_6)] = 0.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, H\}, \quad H = \frac{\xi_2}{2m_1} + \frac{\xi_3}{2m_2} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi} \ln \xi_1 \quad (2.2)$$

На поверхности уровня интеграла H для приведенной системы (2.2) можно построить отображение Пуанкаре, выбирая секущую плоскость в виде $\xi_4 = \text{const}$. Как показывают численные эксперименты (рис. 2), в общем случае система (2.2) демонстрирует хаотическое поведение и, следовательно, является неинтегрируемой.

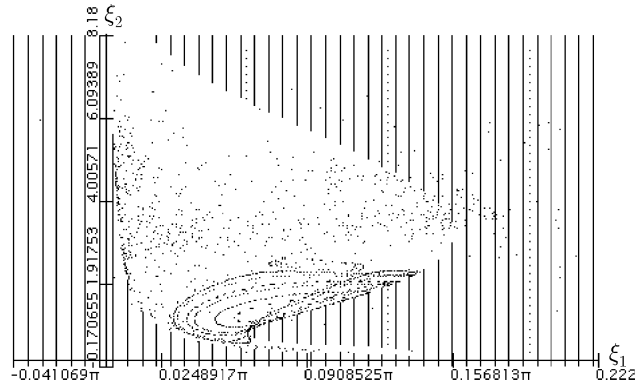


Рис. 2. $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 2, m_1 = 3, m_2 = 4, H = 1, M = 1, \Phi_1^2 + \Phi_2^2 = 1$

3. Интегрируемые случаи

Как отмечалось в п. 2, система (2.1) частично интегрируема при $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ (этот случай обсуждается в п. 4). Оказывается, что если интенсивности вихрей и их массы связаны соотношением

$$\frac{\Gamma_1}{m_1} = \frac{\Gamma_2}{m_2} = k \neq 0, \quad (3.1)$$

система (2.1) имеет дополнительный первый интеграл

$$M_1 = \frac{1}{2} \left(\xi_1 + \frac{\xi_6}{\Gamma_2} + \frac{\xi_7}{\Gamma_2} \right) = \left(\frac{p_4}{\Gamma_2} - \frac{p_2}{\Gamma_1} \right) (q_3 - q_1) - \left(\frac{p_3}{\Gamma_2} - \frac{p_1}{\Gamma_1} \right) (q_4 - q_2),$$

причем $\{M_1, M\} = \{M_1, \Phi_1^2 + \Phi_2^2\} = 0$. Следовательно, система (2.1) интегрируема. Интересно отметить, что условие (3.1) означает совпадение центра масс и центра завихренности двух массовых вихрей. Проведем качественный анализ движения в этом случае. Зададим положение вихрей с помощью комплексных чисел z_1 и z_2 . Тогда, с учетом (3.1), уравнения (1.4) перепишутся в виде

$$\ddot{z}_1 = ik\dot{z}_1 + \frac{F}{m_1}, \quad \ddot{z}_2 = ik\dot{z}_2 - \frac{F}{m_2}, \quad F = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi} \frac{z_1 - z_2}{|z_1 - z_2|^2}.$$

Движение центра масс $z_0 = (m_1 z_1 + m_2 z_2)/m$ описывается уравнением $\ddot{z}_0 = ik\dot{z}_0$. Следовательно центр масс равномерно движется по окружности

$$z_0 = Ce^{ikt} + \frac{\Phi_1 + i\Phi_2}{ikm}. \quad (3.2)$$

Обозначив $z = z_1 - z_2$, найдем

$$\ddot{z} = ik\dot{z} + \kappa \frac{z}{|z|^2}, \quad \kappa = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi} \frac{m}{m_1 m_2}.$$

Пусть $z = we^{i\frac{k}{2}t}$, тогда

$$\ddot{w} = -\frac{k^2}{4}w + \frac{\kappa w}{|w|^2}. \quad (3.2')$$

Это уравнение описывает движение частицы в центральном поле с потенциалом

$$V = \frac{k^2}{8}r^2 - \frac{\kappa}{2}\ln r^2, \quad r^2 = w\bar{w}.$$

Соответствующий приведенный потенциал $V_c = \frac{c^2}{2r^2} + V$ (рис. 3) имеет ровно одну критическую точку $r = r^*$, являющуюся локальным минимумом. Движение точечных вихрей, таким образом, определяется формулами

$$z_1 = z_0 + \frac{m_2}{m}we^{ikt/2}, \quad z_2 = z_0 - \frac{m_1}{m}we^{ikt/2}, \quad (3.3)$$

где z_0 задана соотношением (3.2). Функция $|w(t)|$, как следует из рис. 3, является ограниченной, следовательно, вне зависимости от начальных данных расстояние между вихрями остается ограниченным во время движения. Для большинства значений полной энергии функция $w(t)$ не является периодической (теорема Бертрона). В случае, когда $w(t)$ периодична с периодом T , абсолютное движение вихрей, задаваемое формулами (3.3), является, вообще говоря, двухчастотным. Если же частота $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ соизмерима с k , то в абсолютном пространстве вихри движутся по замкнутым траекториям. Например, критической точке $r = r^*$ приведенного потенциала V_c соответствует решение уравнения (3.2') вида $w = r^*e^{i\Omega t}$, $\Omega = \frac{c}{r^{*2}}$. Траектории вихрей в случае $\frac{\Omega}{k} \in \mathbb{Q}$ показаны на рис. 4. Интересно отметить, что для значений отношения Ω/k близких к 0.5, массовые вихри движутся практически также, как обычные точечные вихри.

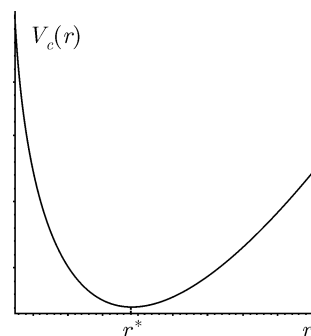


Рис. 3

4. Движение массового вихря и кругового цилиндра в полуплоскости

Общая теория движения обычных точечных вихрей в произвольной области, заполненной идеальной жидкостью, была заложена Раусом [8], а задача о движении вихря в полуплоскости рассматривалась еще Гельмгольцем [6]. Гельмгольц показал, что границу (прямую, ограничивающую полуплоскость) можно заменить вихрем с интенсивностью противоположного знака, поместив его в симметричную относительно границы точку. Вихрь при этом движется параллельно границе со скоростью обратно пропорциональной расстоянию до нее.

Рассмотрим движение двух массовых вихрей с координатами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и интенсивностями Γ и $-\Gamma$ (рис. 5). Массы вихрей предполагаются равными $m_1 = m_2 = m$, а их координаты

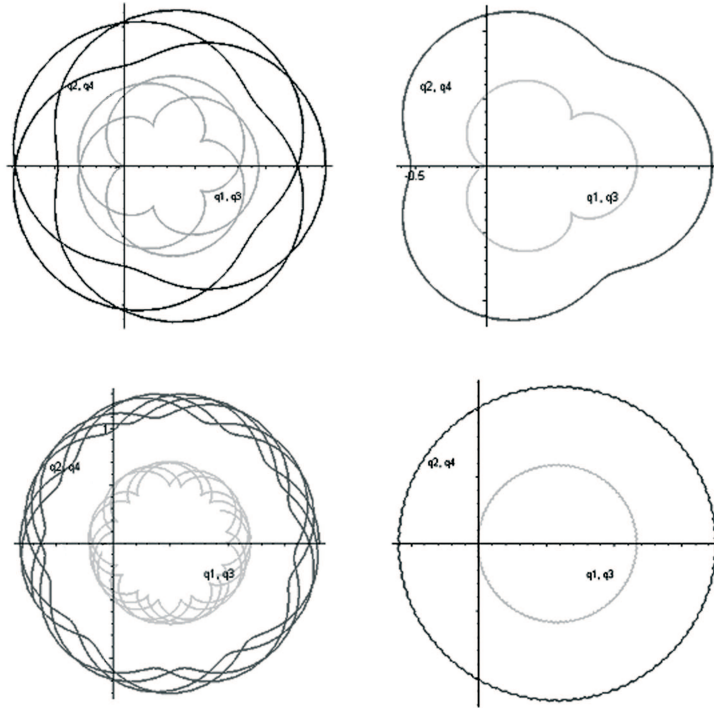


Рис. 4. Значение Ω/k на первом рисунке равно 2, на втором 1, на третьем 0.78, на четвертом 0.51

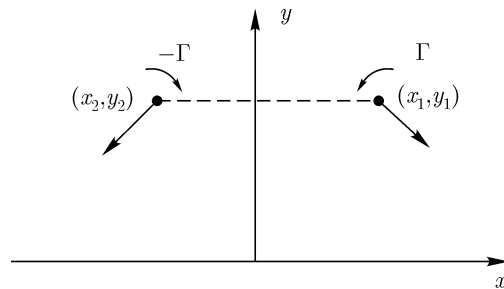


Рис. 5

и скорости удовлетворяют условию:

$$x_1 = -x_2, \quad y_1 = y_2, \quad \dot{x}_1 = -\dot{x}_2, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}_2. \quad (4.1)$$

Несложно проверить, что задаваемое этими соотношениями многообразие является инвариантным для системы (1.3).

Используя интегралы (1.4), находим

$$m\dot{y}_1 = \Gamma x_1 + \frac{\Phi_2}{2}, \quad \ddot{x}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad U = \frac{\Gamma^2}{m^2} \frac{x_1^2}{2} - px_1 + \frac{\Gamma^2}{4\pi m} \ln x_1, \quad p = -\frac{\Gamma^2}{m} \frac{\Phi_2}{2}.$$

Вид функции U в зависимости от p и соответствующий фазовый портрет приведены на рис. 6а,б. Таким образом, наличие у вихря ненулевой массы приводит к тому, что для большинства начальных данных вихрь достигает границы (оси y) за конечное время. Абсолютное движение вихрей, соответствующее фазовым траекториям из колебательной области (рис. 6а), качественно изоб-

ражено на рис. 6с. Относительным равновесиям соответствует равномерное движение вихрей параллельно оси y , при этом $\dot{y}_1 < 0$.

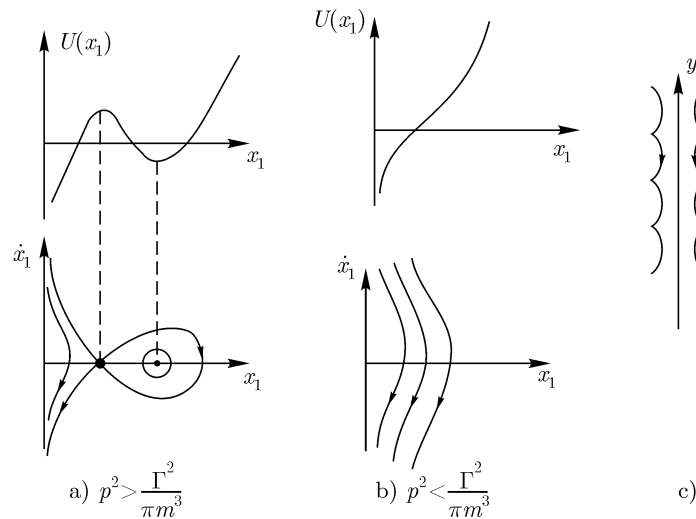


Рис. 6

Рассмотрим теперь предыдущую задачу, заменив массовые вихри на цилиндры ненулевого радиуса R . Координаты и скорости их центров удовлетворяют (4.1). Поскольку направление осей связанной с цилиндрами системы координат остается постоянным ($\omega = 0$), вектор $\left(\frac{\partial R}{\partial u_1}, \frac{\partial R}{\partial u_2}\right)$ сохраняется в неподвижном пространстве.

Уравнения (1.1) имеют первые интегралы:

$$R + \Gamma^2 \kappa(s) + \Gamma \beta(s) u_2 = \text{const},$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_1} = a_1 u_1 + b_2 \dot{s} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial u_2} = a_2 u_2 - \Gamma \beta = -\Phi_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В правой части третьего соотношения стоит $(-\Phi_2)$, а не Φ_2 , поскольку оси y и ξ_2 противоположно направлены.

Выражая u_1 и u_2 из второго и третьего соотношений и подставляя в первое, получим

$$\frac{(\Phi_2 - \Gamma \beta(s))^2}{2a_2} + \frac{a_4}{2} \dot{s}^2 + \Gamma^2 \kappa(s) = \text{const}.$$

Функции $\frac{1}{a_2(s)}$, $a_4(s)$, $\beta(s)$, $\kappa(s)$ являются строго возрастающими, их явный вид достаточно сложен. Выполнив замену времени $t \rightarrow \tau$, $d\tau/dt = \sqrt{2/a_4(s)}$, получим

$$s'^2 + U(s) = \text{const}, \quad ()' = \frac{d}{d\tau}.$$

Проведя численное исследование, можно показать, что при p , не превосходящих некоторого критического значения p^* , функция $U(s)$ строго возрастает; $U(s)$ имеет две критические точки при

$p \geq p^*$, которым соответствует равномерное движение цилиндров вдоль оси y (существование подобных движений отмечено в [2]). При этом вид зависимости $U(s)$ качественно такой же, как на рис. 6а, б. Однако в отличие от предыдущей задачи расстояние между центрами не может быть сколь угодно малым $s \geq 2R > 0$, и поэтому скорость цилиндров в момент столкновения конечна.

Работа выполнена при поддержке гранта ведущих научных школ РФ НШ-1312.2006.1.

Список литературы

- [1] Hicks W.M. *On the motion of two cylinders in a fluid*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 16 (1879) 113–140, 193–219.
- [2] Hicks W.M. *On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid*, Jbid., vol. XVII, 1881, p. 194–202.
- [3] Hicks W.M. *On the motion of two spheres in a fluid*. Phil. Trans., 1880, 455–492.
- [4] Ramodanov S.M. *Motion of two circular cylinders in a perfect fluid*, Reg. & Chaot. Dyn., 2003, v. 8, № 3, p. 313–318.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S.M. *Dynamics of two interacting cylinders in perfect fluid*, DCDS, v. 15, 2006.
- [6] Гельмгольц Г. *Два исследования по гидродинамике*. М., 1902. С. 5–51. // Int. J. Fusion Energy. 1978. 1, № 3/4. Р. 41–68.
- [7] Ламб Г. *Гидродинамика*. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
- [8] Routh E. J. *Some applications of conjugate functions*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1941. 27, № 12. Р. 570–577.